

分数階システムを対象とした適応観測器による リチウムイオン電池の状態推定

高松尚宏 大森浩充（慶應義塾大学）

State Estimation of Lithium-ion Battery by Adaptive Observer for Fractional Calculus System

*T. Takamatsu and H. Ohmori (Keio University)

Abstract— The complicated dynamics of lithium-ion battery can be described as the system containing Warburg impedance, which can be expressed as the fractional order system. In order to control or identify lithium-ion battery system described as fractional order system containing unknown variable parameters, online parameter estimate mechanism for the coefficients of transfer function containing fractional order (like $s^{0.5}$) must be needed. In this paper, we designed the kreisselmeier adaptive observer target at fractional calculus system. Then, we applied the proposed observer to the lithium-ion battery system modeled as electrical circuit system containing Warburg impedance and show the effectiveness by numerical simulation.

Key Words: Adaptive Observer, Fractional Calculus, Non-integer Order System, Battery Dynamics

1 諸言

分数階の微積分作用素（分数階微積分）を用いた物理現象の解析は、レオロジーの分野でゴムなどの高分子粘弾性体に対し古くから行われてきた^[1]。しかし、粘弾性体の解析に用いられるだけではなく、近年では、アモルファス半導体の電気的応答、生体など $1/f$ ノイズを含むシステム、フラクタルな構造を持つ物質中での異常拡散現象の解析などにも利用されるようになっており、この分野の研究が活発化している^{[2],[3],[4]}。制御系の設計に分数階微積分を用いた先駆的研究として、真鍋の研究が知られている^[5]。初期の研究は古典制御理論に基づいたものであったが、分数階微積分で表されるシステムの安定性・可制御性・可観測性などの性質が Matignon らによって明らかにされたことで、1990年代には状態空間表現に基づく制御へ分数階微積分を用いた研究も為されるようになった^{[6],[7]}。しかし、分数階システムに対し現代制御理論を適用する際、制御対象のパラメータが既知であるという前提が必要となる。だが、実際の制御対象のパラメータは未知であり、環境により変動する可能性がある。そのため、そのような未知パラメータを有する分数階システムの制御やパラメータ同定を行うためには、伝達関数中に $s^{0.5}$ といった分数階の次数を含むシステムの係数を同定する必要がある。そこで、本研究では、分数階システムに対し Kreisselmeier 型適応観測器を設計することで、パラメータ同定と状態観測を同時に分数階システムに対し行う手法を提案する。更に、リチウムイオン電池などの電気的特性が分数階次数を持つ伝達関数で表されることに注目し、本手法を分数階システムとして表された電気回路システムに適用することで、リチウムイオン電池の状態観測及びパラメータ同定が同時に達成されることを数値シミュレーションによって示す。

2 分数階微積分

2.1 分数階微積分の定義

分数階微積分とは、1 階、2 階など整数階であった従来の微積分を $1/2$ 階、 $3/4$ 階など分数へ拡張した作用

素である。微積分の考え方には、位置と速度のように物理量と関連付けて捉える方法と曲線の関係を関連付けて捉える方法がある。前者の考え方をを用いて、分数階微積分と物理的なパラメータとの対応関係を捉えようとした場合、「位置の分数階時間微分は位置・速度・加速度の中間的なパラメータである」となってしまう、その意味が不明瞭となってしまうが、後者の方法で分数階微積分を考えた場合、「2 次関数を分数階微分した関数は 2 次関数（2 次曲線）と 1 次関数（直線）の中間的な曲線を表す関数である」というように、その意味は明瞭となる。分数階積分の定義式として、次式で与えられる Riemann-Liouville の分数階積分が知られている。

$${}^{RL}D_t^{-q}[f(t)] = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \quad (2)$$

ここでは、 q は積分階数を表す実数、 $\Gamma(z)$ はガンマ関数であり、これは階乗を実数へと拡張した関数として知られている。一方、分数階微積分の定義式として次式で表される Caputo の定義式が広く用いられている。

$${}_a^C D_t^q[f(t)] = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-q-1}}{\Gamma(n-q)} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (3)$$

ここでは、 q は $n-1 < q < n$ となる微分階数を表す実数である。実際に以下の関数に対し、Caputo の分数階微積分を計算した結果を Fig.1 と Fig.2 に表す。

$$f_1(t) = \sin(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (4)$$

$$f_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Fig. 1 を見ると、Caputo の分数階微積分によって三角関数の微分によって現れる位相のずれが連続的に表されていることが分かる。フーリエ変換によって、あらゆる信号が三角関数の合成で表せることを考えると、このことは重要な意味を持つと言える。自身の角周波数を

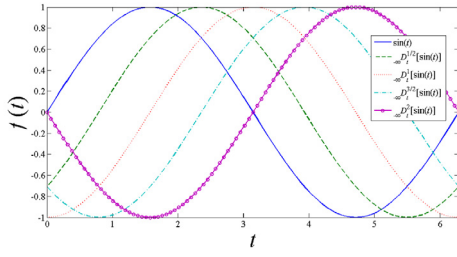


Fig. 1. The function of ${}_{-\infty}^C D_t^q[f_1(t)]$

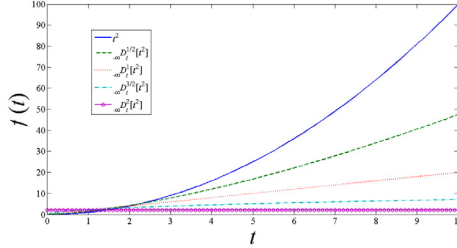


Fig. 2. The function of ${}_{-\infty}^C D_t^q[f_2(t)]$

掛けて位相を 90 度ずらす操作を微分操作とみなせば、 $1/m$ 階の微分は、自身の角周波数の $1/m$ 乗を掛けて位相を $90/m$ 度ずらす操作と見なすことができるため、三角関数でなくとも Caputo の定義式により分数階の微分を表現できると考えることができる。Fig. 2 をみると、ちょうど分数階微分された関数が 0 階、1 階、2 階の微分がされた関数の中間を通るような関数となっており、Caputo の分数階微分により微分が連続的に表現されていることが分かる。

2.2 分数階微積分で表されるシステム

分数階微積分で表されるシステムの例として、Warburg インピーダンスが含まれた電位回路システムを説明する。電極と電解質の間で起こるイオン拡散現象に由来し、リチウムイオン電池が分数次数を持ったシステムとしての特性を示すことが知られている [8]。このような分数次数を持ったシステムを表現する為に Warburg インピーダンスと呼ばれる要素を用いた電気回路のモデリングが行われることがある。Warburg インピーダンスは次式に従う要素として定義される。

$$i_W(t) = \frac{1}{R_W} D^{1/2} [v_W(t)] \quad (6)$$

ここで、 $i_W(t)$ 、 $v_W(t)$ は Warburg インピーダンスに流れる電流と両端の電圧差を表す。

Warburg インピーダンスを含んだシステムとして、Fig. 3 で表される電気回路システムを考える。このとき、電気回路の伝達関数は次式で表すことができる。

$$V_1(s) - V_3(s) = \frac{Bs + \frac{1}{C}s^{1/2} + \frac{B}{RC}}{s^{3/2} + \frac{B}{R}s} I_C(s) \quad (7)$$

このように、Warburg インピーダンスを含んだシステムは、分数次数を持ったシステムとしてモデル化できることが分かる。

2.3 分数階システムの安定性・可制御性・可観測性

分数階システムが次式で表されるとする。

$$D^q x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (8)$$

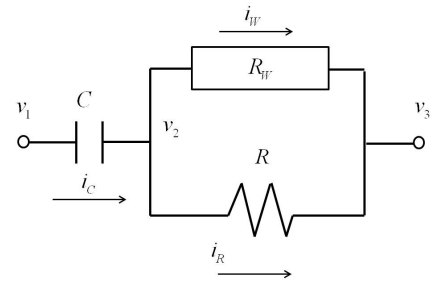


Fig. 3. Battery Charging Circuit containing Warburg Impedance

$$y(t) = C^T x(t) \quad (9)$$

このシステムの安定性・可制御性・可観測性に関して以下の補題が知られている [6],[7]。

補題 1 システムが漸近安定である必要十分条件は、行列 A の固有値 λ_i 、($i = 1, 2, \dots, n$) の偏角が次式を満たすことである。

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

補題 2 以下の条件は等価である。

1. (A, B) が可制御である。
2. 次の可制御性行列のランクが n である。

$$W = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (11)$$

補題 3 以下の条件は等価である。

1. (A, C) が可観測である。
2. 次の可制御性行列のランクが n である。

$$N = [C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^{n-1})^T]^T \quad (12)$$

2.4 分数階微積分の近似手法

分数階微積分を計算する際に、初期時刻からの畳み込み積分の計算をする必要が生じ、膨大な計算時間がかかってしまう。そのため分数階微積分 s^{-q} の近似を行って計算時間を短縮する必要がある。近似手法のひとつとして、ボード線図上でフィッティングを行うことで非整数階微積分を近似する方法がある。このような方法での分数階微積分の近似は、日本で真鍋により提案され、G. Carlson, A. Charef, A. Oustloup らも同様にボード線図上で近似することで分数階微積分を表現する近似方法を提案している [5],[9],[10],[11]。真鍋によって提案された近似法は真鍋アプローチとも呼ばれ、指定した周波数帯域において高い近似精度を実現することができる手法である。真鍋はこの折れ線近似により、次式で表される近似式を導出した。

$$\frac{1}{s^q} \approx \frac{1}{s} \prod_{i=1}^j \frac{s + a_i}{s + b_i} \times \prod_{i=1}^k \frac{1 + b_i s}{1 + a_i s} \quad (13)$$

$$\Omega_{low} \leq \omega \leq \Omega_{high} \quad (14)$$

ただし、

$$1 < q < 2 \quad (15)$$

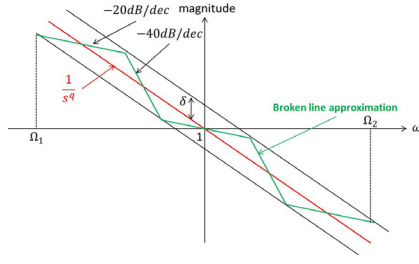


Fig. 2. Broken line approximation of s^{-q} ($1 < q < 2$).

$$\delta = 20 \log_{10} \alpha \quad (16)$$

$$\beta = \alpha^{-\frac{2}{(2-q)(q-1)}} \quad (17)$$

$$a_1 = \alpha^{-\frac{1}{q-1}} \quad (18)$$

$$a_{i+1} = a_i \beta \quad (19)$$

$$b_i = a_i \alpha^{-\frac{2}{2-q}} \quad (20)$$

$$\Omega_{low} = a_{j+1} \quad (21)$$

$$\Omega_{high} = \frac{1}{a_{k+1}} \quad (22)$$

$[\Omega_{low}, \Omega_{high}]$ は近似される周波数範囲を表している。もし、 $\frac{1}{s^\gamma}$, ($0 < \gamma < 1$) を得たいのであれば、上式に対し s を乗ずればよく、

$$\frac{1}{s^\gamma} = \frac{1}{s^q} \times s = \prod_{i=1}^j \frac{s + a_i}{s + b_i} \times \prod_{i=1}^k \frac{1 + b_i s}{1 + a_i s} \quad (23)$$

として得られる。

3 Kreisselmeier 型適応観測器の設計

入出力を $u(t)$, $y(t)$ とし、未知の係数 α_j , β_j を持った次式のプラントに対し、適応観測器を設計する。

$$D^{\frac{1}{m}} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad (24)$$

$$y(t) = c^\top x(t) \quad (25)$$

$$A = \begin{bmatrix} & I_{n-1} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\alpha^\top = [-\alpha_1 \quad -\alpha_2 \quad \cdots \quad -\alpha_n] \quad (27)$$

$$B^\top = \beta^\top = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n] \quad (28)$$

$$c^\top = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (29)$$

ただし、以下の仮定が成り立つものとする。

A1. プラントは漸近安定

A2. 可制御・可観測

A3. 最高次数 n/m は既知

観測器の設計において、 F が安定となるような、適当な行列 f を与え式変形を行うことで、次式が得られる。

$$D^{\frac{1}{m}} x(t) = Fx(t) + (\alpha - f)y(t) + \beta u(t) \quad (30)$$

$$F = \begin{bmatrix} f & g^\top \\ & K \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$f^\top = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n] \quad (32)$$

$$g^\top = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (33)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & I_{n-2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

定理 1 可観測な制御対象 (25), (30) に対し、適当な行列 f が与えられたとき、制御対象は以下のように表現することができる。

$$y(t) = \theta^\top \xi(t) + z(t) \quad (35)$$

$$x(t) = R_y(\alpha - f) + R_u \beta + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F^j t^{\frac{1}{m}j}}{\Gamma(\frac{1}{m}j + 1)} x_0 \quad (36)$$

$$\theta^\top = [(\alpha - f)^\top \quad \beta^\top] \quad (37)$$

$$\xi^\top = [f_y^\top \quad f_u^\top] \quad (38)$$

$$D^{1/m} f_y(t) = F^\top f_y + c y \quad (39)$$

$$D^{1/m} f_u(t) = F^\top f_u + c u \quad (40)$$

$$R_y^\top(t) c = f_y(t) \quad (41)$$

$$R_u^\top(t) c = f_u(t) \quad (42)$$

$$z(t) = c^\top \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F^j t^{\frac{1}{m}j}}{\Gamma(\frac{1}{m}j + 1)} x_0 \quad (43)$$

【証明】

(24) の解は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} x(t) &= E_{\frac{1}{m}, 1} \left(F t^{\frac{1}{m}} x_0 \right) \\ &+ \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1-m}{m}} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}} \left(F(t - \tau)^{\frac{1}{m}} \right) (\alpha - f) y(\tau) d\tau \\ &+ \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1-m}{m}} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}} \left(F(t - \tau)^{\frac{1}{m}} \right) \beta u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (44)$$

$$E_{p,q}(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z^j}{\Gamma(pj + q)} \quad (45)$$

ここで、 $E_{p,q}(\cdot)$ は、Mittag-Leffler 関数を表し、 $m = p = q = 1$ の時、 $E_{p,q}(A t^{1/m}) = e^{At}$ となり、これは微分方程式の解の遷移行列に相当する。

同様に、(41), (42) のように定義された R_y , R_u の解を求めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} R_y &= \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1-m}{m}} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}} \left(F(t - \tau)^{\frac{1}{m}} \right) y(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} R_u &= \int_0^t (t - \tau)^{\frac{1-m}{m}} E_{\frac{1}{m}, \frac{1}{m}} \left(F(t - \tau)^{\frac{1}{m}} \right) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (47)$$

上式について，次式の関係が成立することが分かる．

$$FR_y = R_y F \quad (48)$$

$$FR_u = R_u F \quad (49)$$

(44) に，(46)，(47) を代入すると次の式が得られる．

$$x(t) = E_{\frac{1}{m},1} \left(Ft^{\frac{1}{m}} \right) x_0 + R_y(\alpha - f) + R_u \beta \quad (50)$$

更に，上式の両辺に c^\top を掛けると次式が得られる．

$$\begin{aligned} y(t) &= c^\top x(t) \\ &= c^\top E_{\frac{1}{m},1} \left(Ft^{\frac{1}{m}} \right) x_0 \\ &\quad + f_y^\top (\alpha - f) + f_u^\top \beta \end{aligned} \quad (51)$$

ここで， $D^{\frac{1}{m}} f_y$ ， $D^{\frac{1}{m}} f_u$ を計算すると以下のように計算することができる．

$$\begin{aligned} f_k^{\frac{1}{m}} &= R_k^\top \frac{1}{m} c \\ &= (FR_k + I_n k)^\top c \\ &= F^\top R_k^\top c + ck \\ &= F^\top f_k + ck \quad (k = y, u) \end{aligned} \quad (52)$$

【証明終】

(35) において， θ はプラントの未知パラメータに相当するため，パラメータ推定値 $\hat{\theta}(t)$ を用いて出力推定値 $\hat{y}(t)$ を次のように構成する．

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta}^\top(t) \xi(t) \quad (53)$$

$$\hat{\theta}^\top(t) = [(\hat{\alpha}(t) - f)^\top \quad \beta^\top(t)] \quad (54)$$

このとき，プラントからの出力 $y(t)$ とその推定値 $\hat{y}(t)$ との誤差方程式 $e_1(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ は以下のように表すことができる．

$$e_1(t) = \phi^\top(t) \xi(t) - z(t) \quad (55)$$

$$\phi^\top(t) = [(\hat{\alpha}(t) - \alpha)^\top \quad (\hat{\beta}(t) - \beta)^\top] \quad (56)$$

F は安定ゆえに $t \rightarrow \infty$ にて $z(t) \rightarrow 0$ となる．そのため $e_1(t) = \phi^\top(t) \xi(t)$ ($t \rightarrow \infty$) となり，適応制御則を適切に定めることで， $t \rightarrow \infty$ で出力推定誤差 $e_1(t) \rightarrow 0$ とできる．適応制御則の構成のために以下の定理を用いる．

定理 2 行列 F が安定である時，(55)，(56) として表される誤差システムに対し，次式で表される適応制御則を構成した場合， $t \rightarrow \infty$ において出力推定誤差 $e_1(t) \rightarrow 0$ とすることができる．

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i(t) &= -\frac{\gamma_i \xi_i(t) e_1(t)}{\nu + \xi^\top(t) \xi(t)}, \quad (\lambda > 0, \gamma_i \geq 0) \\ (i &= 1, 2, \dots, 2n) \end{aligned} \quad (57)$$

【証明】

次式で表されるリアプノフ関数を考える．

$$V(t) = \frac{1}{2} \phi^\top \gamma^{-1} \phi > 0 \quad (58)$$

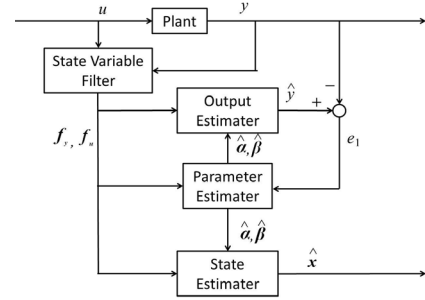


Fig. 3. Construction of Adaptive Observer.

ここで，以下の関係式を利用する．

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{dt} \quad (59)$$

(57)，(59)， $e_1(t) \rightarrow \phi^\top(t) \xi(t)$ から，リアプノフ関数の微分は次式で表される．

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \phi^\top \gamma^{-1} \dot{\phi} \\ &= -\frac{\phi^\top \xi}{\nu + \xi^\top(t) \xi(t)} e_1(t) \\ &= -\frac{e_1^2}{\nu + \xi^\top(t) \xi(t)} < 0 \end{aligned} \quad (60)$$

【証明終】

これらの式から構成される適応観測器を Fig. 2 で表した． $\xi(t)$ の PE 性が満たされるように適切な入力を与えることにより $e_1(t) = \phi^\top(t) \xi(t) \rightarrow 0$ から $\phi(t) \rightarrow 0$ (つまり $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta$) がいえ，パラメータ同定および状態観測が達成される．

4 数値シミュレーション

Fig. 3 で表される電気回路システムを考え，観測対象のプラントが次式で表されるとする．

$$D^{\frac{1}{2}} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (61)$$

$$y(t) = c^\top x(t) \quad (62)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_W}{R} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$B^\top = \begin{bmatrix} R_W & \frac{1}{C} & \frac{R_W}{RC} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$c^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$x(0) = \mathbf{0} \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} C & R_B & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

このシステムに対し適応観測器を構成し，以下の条件で数値シミュレーションを行った．

$$u = \sum_{j=1}^{12} \sin \frac{1+j}{5} t \quad (68)$$

$$f_1 = -2 - \sqrt{2} \quad (69)$$

$$f_2 = -2 - 2\sqrt{2} \quad (70)$$

$$f_3 = -2\sqrt{2} \quad (71)$$

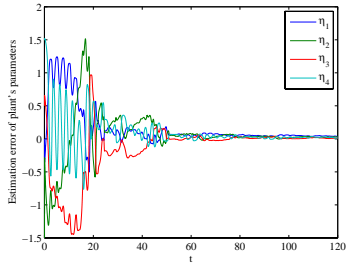


Fig. 4. Estimation Error of Plant Parameters.

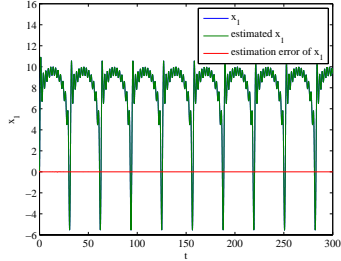


Fig. 5. Estimated y ($y = x_1$).

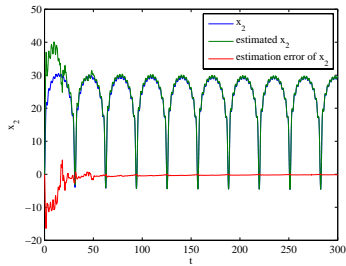


Fig. 6. Estimated x_2 .

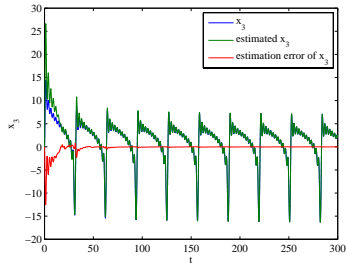


Fig. 7. Estimated x_3 .

$$\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{R}_W & \hat{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 2 \times 10^4 & (i = 1, 4, 5, 6) \\ 0 & (i = 2, 3) \end{cases} \quad (73)$$

$$\nu = 1 \quad (74)$$

ここで、 \hat{C} , \hat{R}_W , \hat{R} は初期時刻における C , R_W , R の推定値である。

パラメータ同定誤差を $\eta_1 = \hat{\alpha}_1 - \alpha_1$, $\eta_2 = \hat{\beta}_1 - \beta_1$, $\eta_3 = \hat{\beta}_2 - \beta_2$, $\eta_4 = \hat{\beta}_3 - \beta_3$ として表し、状態推定とパラメータ同定を表した結果を Fig. 4 - Fig. 7 に表す。これらの結果から、提案手法によって、リチウムイオン電池など、分数階次数を含んだシステムの状態とパラメータをオンラインで推定できることが示された。

5 結言

本研究では、分数階システムを対象とした Kreisselmeier 適応観測器の設計を分数階次数を含んだシス

テムとして表される電気回路システムを対象に行った。数値実験から、提案する適応観測器の有効性が示された。本研究で提案された手法を用いることにより、分数階システムとして表されたりチウムイオン電池の状態と未知パラメータの推定が可能となる事が期待される。

参考文献

- 1) R. L. Bagley and P. J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, J. of Rheology, 27:201-210, 1983.
- 2) M. Fukunaga, Application of fractional diffusion equation to amorphous semiconductors, In J. C. Trigeassou A. Le Mehaute, J. A. T. Machado and J. Sabatier, editors, Fractional Differentiation and its Applications, pages 389-400, Ubooks, 2005.
- 3) 島本憲夫, 非整数階微分による異常拡散のモデル化について (その1)「非線形拡散の数理」, 京都大学数理解析研究所講究録 No.1810, pp.59-84, 2012.
- 4) 島本憲夫, 非整数階微分による異常拡散のモデル化について (その2)「非線形拡散の数理」, 京都大学数理解析研究所講究録 No.1810, pp.85-112, 2012.
- 5) 真鍋, “非整数階積分型制御系について”, 電気学会雑誌, 80-5, pp.589-597, 1960.
- 6) D. Matignon, Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing, Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, Vol.2, pp.963-968, 1996.
- 7) D. Matignon and B.d 'Andrea-Novel, Some Results on Controllability and Observability of Finite-Dimensional Fractional Differential Systems, Computational Engineering in Systems and Application Multiconference, Vol.2, pp.952-956, 1996.
- 8) S. Das, Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer, 168-174, 2008.
- 9) G. Carlson and C. Halijak, Approximation of Fractional Capacitors $(1/s)(1/n)$ by a Regular Newton Process, IEEE Transactions on Circuit Theory 11, 210-213, 1964.
- 10) A. Charef, H. Sun, Y. Tsao, and B. Onaral, Fractional System as represented by singularity function, IEEE Transactions on Automatic Control 37, 1465-1470, 1992.
- 11) A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, F. M. Nanot, Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications 47, 25-39, 2000.